INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES
STATISTICIENS ECONOMISTES
A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

SESSION 1988 - Option MATHEMATIQUES

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures

PRELIMINAIRES ET AVERTISSEMENT

. Les calculs intermédiaires seront effectués à la précision de la machine. Les résultats seront donnés à 5.10^{-6} près (meilleure approximation à 5 chiffres après la virgule). Les calculs seront faits ensuite avec ces résultats approchés.

. Le but du problème est de remplacer, pour des calculs approchés ultérieurs, la fonction $f(x) = e^{x^2}$ sur $[0,1]$ par une fonction g de classe C^2 vérifiant :

$$(1)\begin{cases} \cdot\ g\left(\frac{i}{5}\right) = f\left(\frac{i}{5}\right) \text{ pour } i \in \{0,1,2,\ldots,5\} \\ \cdot\ g'(0) = f'(0) \text{ et } g'(1) = f'(1) \\ \cdot\ g \text{ est un polynome de degré 3 sur } \left[\frac{i}{5},\frac{i+1}{5}\right] \text{ pour } i \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$$

I

"Calcul de g"

1) Calculer $f\left(\frac{i}{5}\right)$ pour $i \in \{0,1,2,\ldots,5\}$ et présenter les résultats dans un tableau. Calculer $f'(x)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

2) Soient (a_i) et (b_i) deux suites de nombres réels et $P_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 + \delta_i x^3$ défini par

$$P_i(0) = a_i,\ P_i'(0) = b_i,\ P_i\left(\frac{1}{5}\right) = a_{i+1},\ P_i'\left(\frac{1}{5}\right) = b_{i+1}$$

Montrer que ces quatre conditions définissent le polynôme P_i de manière unique et expliciter les coefficients α_i, β_i, γ_i et δ_i.

On considère à présent $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = P_i\left(x - \frac{i}{5}\right) \text{ si } x \in \left[\frac{i}{5},\frac{i+1}{5}\right]$$

3) Trouver une relation entre a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, a_{i+2}, b_{i+2} pour $i \in \{0,1,2,3\}$ assurant que g est de classe c^2 sur $[0,1]$.

4) On prend maintenant $a_i = f\left(\frac{i}{5}\right)$, $b_0 = f'(0)$ et $b_5 = f'(1)$.

a - Prouver que g est de classe c^2 si b_1, b_2, b_3 et b_4 vérifient le système :

$$\begin{aligned} 4b_1 + b_2 &= c_1 \\ b_1 + 4b_2 + b_3 &= c_2 \\ b_2 + 4b_3 + b_4 &= c_3 \\ b_3 + 4b_4 &= c_4 \end{aligned}$$

où c_i $i \in \{1,2,3,4\}$ sont des réels que l'on explicitera.

b - Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss (chaque équation sera multipliée par le coefficient adéquat et retranchée de la suivante...).

c - Construire un tableau donnant α_i, β_i, γ_i et δ_i pour $i \in \{0,1,\ldots,4\}$.

5) Constater que la fonction g vérifie bien les conditions (1).

REMARQUE : dans la suite du problème on admettra que $|g(x) - f(x)| \leq A$ où A est donné par :

	$0 \leq x \leq \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \leq x \leq 1$
A	5.10^{-5}	7.10^{-5}	$1,4.10^{-4}$	$1,8.10^{-4}$	$7,1.10^{-4}$

Tournez la page S.V.P.

II

"Calcul de $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$."

1) a - Calculer $\int_0^{\frac{1}{5}} P_i(x)dx$ en fonction de a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}. En déduire une expression de $\int_0^1 g(x)dx$.

b - Calculer un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\int_0^1 f(x)\,dx$ par $\int_0^1 g(x)dx$.

2) a - Calculer $\int_0^x P_i(t)\,dt$ en fonction de α_i, β_i, γ_i, et δ_i.
En déduire une expression de $\int_0^x g(t)dt$ pour $x \in [0,1]$.

b - Soit A_i le terme constant du polynôme qui coïncide avec g sur $\left[\frac{i}{5}, \frac{i+1}{5}\right]$, $i \in \{0,1,..,4\}$.

Calculer A_i pour $i \in \{0,4\}$.

c - Etudier sur [0,1] la primitive F de f qui annule en 0. Tracer son graphe (on fera apparaitre, dans un repère orthonormé ayant 5 cm pour unité, les points d'abscisses $\frac{i}{5}$ et leurs tangentes).

III

"Résolution de l'équation (2) $y' + y = f(x)$"

1) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = P_i(x)$ en fonction de α_i, β_i, γ_i et δ_i.

2) Trouver alors une solution de l'équation différentielle $y' + y = g(x)$ pour $x \in \left[0,\frac{1}{5}\right]$ vérifiant $y'(0) = 0$. Calculer $y\left(\frac{1}{5}\right)$ puis trouver une solution de $y' + y = g(x)$ sur $\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

3) On cherche un majorant de l'erreur commise sur y en remplaçant dans l'équation (2) $f(x)$ par $g(x)$. On désigne par y_1 la solution de $y' + y = g(x)$ telle que $y_1(0) = 0$ et par y_2 la solution de $y' + y = f(x)$ telle que $y_2(0) = 0$.

a - Erreur de méthode :

. Donner l'équation différentielle vérifiée par $z = e^x (y_1 - y_2)$.

. Trouver un majorant de $|z(x)|$ en fonction de x sur $\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

. En déduire un majorant de l'erreur commise sur y en remplaçant $f(x)$ par $g(x)$ dans l'équation (2).

b - Erreur d'arrondi :

. Montrer que y_1 est connue sans erreur sur $\left[0,\frac{1}{5}\right]$.

. Déterminer un majorant de l'erreur d'arrondi sur $y_1\left(\frac{1}{5}\right)$.

. En déduire un majorant de l'erreur sur les coefficients de y_1 sur $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right]$.

. Trouver un majorant de l'erreur d'arrondi sur $y_1(x)$ pour $x \in \left[0,\frac{1}{5}\right]$.

c - Déduire de ce qui précède un majorant de l'erreur obtenue en remplaçant $f(x)$ par $g(x)$ dans l'équation (2).

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail